Zadania na XXI Podkarpacki Konkurs Matematyczny
im. Franciszka Leji
Poziom I

(klasy pierwsze liceum i technikum oraz klasy ósme szkoły podstawowej)
Etap powiatowy
5 marca 2022 r. godzina 10.00
(150 minut)

1. Sprawdź, że wyrażenie: $\dfrac{x^2+1}{x\cdot\sqrt{\left(\frac{x^2-1}{2x}\right)^2+1}}$, dla x<0, jest liczbą całkowitą.

2. Wykaż że liczba $L = 4\cdot\dfrac{\sqrt{\sqrt{6}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\frac{9}{2}}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}$ jest wymierna i należy do przedziału $\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

3. Pewien pasażer pytany o numer swojego biletu, odpowiedział: „Numer mojego biletu jest liczbą trzycyfrową. Wszystkie cyfry numeru biletu są różne i różne od zera. Jeśli dodamy wszystkie liczby dwucyfrowe, utworzone z cyfr numeru biletu, to połowa tej sumy jest liczbą oznaczającą numer mojego biletu.” Jaki numer ma bilet pasażera?

4. Dany jest trójkąt ABC taki, że |AB| = c, |BC| = a, |AC| = b oraz $a^2 = b^2 + bc$. Wykaż, że w tym trójkącie kąt wewnętrzny przy wierzchołku A jest dwa razy większy od kąta wewnętrznego przy wierzchołku B.

5. Dany jest okrąg o środku w punkcie O i promieniu r (r>0). Odcinek AB jest styczny do okręgu, tak że punkty A oraz B nie są punktami styczności. Punkty O, A, B połączono w trójkąt prostokątny ($\sphericalangle AOB = 90^\circ$), o bokach |OA|= 4 cm i |OB|= 3 cm. Oblicz pole części wspólnej koła o środku w punkcie O i promieniu r z trójkątem AOB.

Powodzenia!